

# SUITES NUMERIQUES

## 1) RAPPELLES

### 1) Suite arithmétique ; suite géométrique

#### 1.1 Activité :

#### Activité :

Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société  $\mathcal{A}$  propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société  $\mathcal{B}$  propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient  $a_n$  et  $b_n$  les salaires proposés respectivement par les sociétés  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  pour le nième mois.

- 1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.
- 2- Trouver une relation entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$  puis entre  $b_{n+1}$  et  $b_n$ .
- 3- Calculer les salaires du 10<sup>ème</sup> mois pour les deux sociétés.
- 4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

#### Rappelle :

|   | Suite arithmétique   | Suite géométrique   |
|---|--|---|
| Définition  | $u_{n+1} = u_n + r$  | $v_{n+1} = qv_n$  |
| Terme général                                     | $u_n = u_p + (n - p)r$   | $v_n = v_p \times q^{n-p}$  |
| Relation entre 3 termes consécutifs $a, b$ et $c$ | $2b = a + c$   | $b^2 = ac$  |
| Somme des termes consécutifs                      | $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$<br>$= \frac{(n-p+1)}{2} [u_p + u_n]$             | $S = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$<br>$= v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \quad (q \neq 1)$   |
| Variations  | $(u_n)$ est croissantes ssi $r \geq 0$<br>$(u_n)$ est décroissantes ssi $r \leq 0$ | $(v_n)$ est croissantes ssi $q \geq 1$<br>$(v_n)$ est décroissantes ssi $0 < q \leq 1$<br>Si $q < 0$ alors $(v_n)$ n'est pas monotone |

#### Exercice :

Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2u_n - 5) \end{cases} \quad (\text{La suite } (u_n)_n \text{ s'appelle une suite arithmético-géométrique})$$

1- Soit la suite  $(v_n)_n$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$

a- Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(v_n)_n$  soit géométrique.

b- Déterminer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

2- Calculer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ .

2) Suites majorée, suites minorée ; Monotonie d'une suite.**Définition (Rappelle) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite numérique. ( $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ )

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  **est majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que :  $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \leq M)$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  **est minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que :  $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \geq m)$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  **est bornée** si elle est majorée et minorée.

**Théorème :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite numérique. ( $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ )

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  **est croissante** si et seulement si :  $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \geq u_n)$
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  **est décroissante** si et seulement si :  $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \leq u_n)$

**Exercice 1 :**

Soit la suite récurrente  $(u_n)_n$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 1}{2u_n + 3} \end{cases}$$

- 1- Montrer que  $(u_n)_n$  est minorée par 1 et majorée par 3.
- 2- Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$ .

**Exercice 2 :**

Soit la suite récurrente  $(v_n)_n$  définie par : 
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$

- 1- Montrer que la suite  $(v_n)_n$  est croissante.
- 2- Montrer que la suite  $(v_n)_n$  est minorée par  $\sqrt{2}$  et majorée par 2.

**Exercice 3 :**

Soit la suite récurrente  $(w_n)_n$  définie par : 
$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ (\forall n \geq 1) \left( w_n = \sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1} + 2} \right) \end{cases}$$

- 1- Calculer  $w_1$  ;  $w_2$  et  $w_3$
- 2- Soit la suite  $(v_n)_n$  définie par ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(v_n = w_n^n)$ 
  - a- Déterminer la nature de la suite  $(v_n)_n$
  - c- Déterminer  $v_n$  puis  $w_n$  en fonction de  $n$ .

II) LIMITE D'UNE SUITE1) Activité

Fractale.exe

**Activité :**

1- Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+)(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

2- Soit  $[AB]$  un segment de longueur  $l_0 = 1$  ; On procède comme suite : dans l'étape 1 on découpe le segment  $[AB]$  en 3 parties égales et on ajoute une quatrième de même longueur.

Dans l'étape 2 on fait la même chose qu'on a fait au segment  $[AB]$  au 4 segments obtenus à l'étape 1. ainsi de suite

a) Quelle est le nombre de segments dans l'étape  $n$

b) Quelle est la longueur de la ligne brisée dans l'étape  $n$

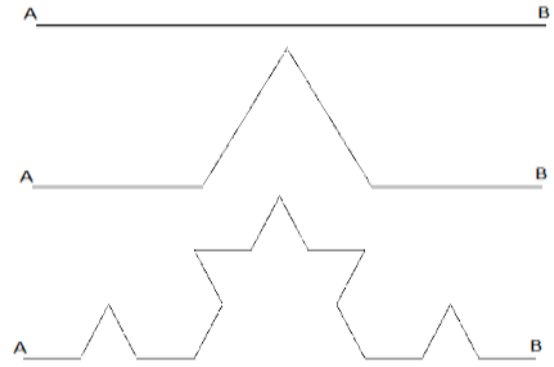
3- déterminer un entier  $n$  pour la quelle  $l_n > 1000$

4- Soit  $A$  un réel quelconque positif ; Montrer qu'il existe  $N_0$  tel que si  $n \geq N_0$  alors  $l_n \geq A$

On peut dire : « **On peut rendre  $l_n$  aussi grande qu'on veut** »

Ceci se traduit mathématiquement par :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = +\infty$

**La ligne brisée "limite" s'appelle une fractal.**



## 2) Définitions

### Définition 1 :

Soit  $(u_n)_n$  une suite numérique. On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ) si elle vérifie la proposition suivante :  $(\forall A > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A)$  on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

**Remarque :** L'expression « quand  $n$  tend vers  $+\infty$  » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et on se contente d'écrire :  $\lim u_n = +\infty$

**Propriété :** (limites de référence)

Les suites  $(n)_n ; (n^2)_n ; (n^k)_n (k \in \mathbb{N}^*) ; (\sqrt{n})_n , (\sqrt[p]{n})_n (p \in \mathbb{N}^*)$  tendent vers  $+\infty$

**Exercice :** Montrer le dernier résultat

### Définition 2 :

Soit  $(u_n)_n$  une suite numérique. On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $-\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ) si elle vérifie la proposition suivante :  $(\forall A > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A)$  on écrit  $\lim u_n = -\infty$

**Remarque :**  $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

### Définition 3 :

Soit  $(u_n)_n$  une suite numérique et  $l$  un nombre réel. On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $l$  si elle vérifie la proposition suivante :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$  on écrit  $\lim u_n = l$

### Définition 4 :

Une suite qui tend vers une limite finie  $l$  s'appelle une suite **convergente**.  
une suite qui n'est pas convergente est une suite **divergente**.

### Théorème :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est divergente

**Exemple :** (Exercice déjà corrigé)

Soit la suite récurrente  $(v_n)_n$  définie par :  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

La suite  $(v_n)_n$  est croissante.

La suite  $(v_n)_n$  est majorée par 2. donc elle est convergente.



**Remarque :**

Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ n'est pas monotone mais elle est convergente.}$$

**Remarque :**

Suite divergente veut dire que la suite n'a pas de limite finie c'est-à-dire que la suite n'a pas de limite ou elle a une suite infinie.

**Exemples :**

- les suites  $\left(\frac{1}{n}\right)_n$  ;  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$  ;  $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_n$  sont des suites convergentes
- Les suites  $(n)_n$  ;  $(-n^2)_n$  ;  $(n^k)_n$  ;  $((-1)^n)_n$  ;  $(\cos n)_n$  sont divergentes

**Théorème :**

Si une suite  $(u_n)_n$  admet une limite finie  $l$  cette limite est **unique**

**Preuve :** (En exercice)

Utiliser la définition et la propriété :  $|a + b| \leq |a| + |b|$

**3) Opération sur les limites des suites.****1) Limite de la somme**

|                   |          |           |           |           |           |                             |
|-------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------------------|
| $\lim u_n$        | $l$      | $l$       |           | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$                   |
| $\lim v_n$        | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$                   |
| $\lim(u_n + v_n)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>Formes indéterminées</b> |

**2) Limites des produits**

|                        |        |                      |           |                      |           |                             |
|------------------------|--------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|-----------------------------|
| $\lim u_n$             | $l$    | $l > 0$ ou $+\infty$ |           | $l < 0$ ou $-\infty$ |           | $\pm\infty$                 |
| $\lim v_n$             | $l'$   | $+\infty$            | $-\infty$ | $+\infty$            | $-\infty$ | $0$                         |
| $\lim(u_n \times v_n)$ | $l.l'$ | $+\infty$            | $-\infty$ | $-\infty$            | $+\infty$ | <b>Formes indéterminées</b> |

**3) Limites des inverses**

|                                    |               |           |           |             |
|------------------------------------|---------------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim u_n$                         | $l \neq 0$    | $0^+$     | $0^-$     | $\pm\infty$ |
| $\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$         |

**3) Limites des quotients**

|                                      |                |                      |           |                      |           |                             |                             |
|--------------------------------------|----------------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\lim u_n$                           | $l$            | $l > 0$ ou $+\infty$ |           | $l < 0$ ou $-\infty$ |           | $0$                         | $\pm\infty$                 |
| $\lim v_n$                           | $l' \neq 0$    | $0^+$                | $0^-$     | $0^+$                | $0^-$     | $0$                         | $\pm\infty$                 |
| $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ | $\frac{l}{l'}$ | $+\infty$            | $-\infty$ | $-\infty$            | $+\infty$ | <b>Formes indéterminées</b> | <b>Formes indéterminées</b> |

**Propriété :**

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

**4) Les techniques de calculs des limites****Théorème 1:**

Si la suite  $(u_n)_n$  est définie d'une façon explicite  $u_n = f(n)$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercices :**

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim \left( \frac{2n^2 + n}{\sqrt[3]{n^5 + n^2}} \right)$

2.  $\lim \left( n \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{n} \right) \right)$

3.  $\lim \left( \sqrt[4]{n^3 + n^2} - \sqrt{n+1} \right)$

**Théorème 2 :**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites numériques tels que :  $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases}$

On a alors :  $\lim u_n = +\infty$ .

**Preuve :** (On utilise la définition des limites)

**Propriété 1 :** (l'inégalité de Bernoulli)

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+)(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Corolaire :**

- Si  $q > 1$  alors  $\lim q^n = +\infty$
- Si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim q^n = 0$
- Si  $q \leq -1$  la suite  $(q^n)_n$  est divergente.

**Preuve :**

1. Pour  $q > 1$  : On pose  $q = 1+x$  où  $x > 0$  et donc  $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$  et comme  $\lim 1+nx = +\infty$  alors d'après le théorème précédent :  $\lim q^n = +\infty$
2. Pour  $-1 < q < 1$ 
  - a) Pour  $q = 0$  on a :  $\lim 0^n = 0$
  - b) On suppose que  $q \neq 0$  on a :  $\left| \frac{1}{q} \right| > 1$  et par suite :  $\lim \left| \frac{1}{q} \right|^n = \lim \frac{1}{|q|^n} = +\infty$   
d'où et d'après les opérations sur les limites on a :  $\lim |q|^n = 0$  donc  $\lim q^n = 0$

**Exercices :**

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim \left( -\frac{4}{7} \right)^n$

2.  $\lim \left( \frac{2^n - 3^n}{3^n - 5^n} \right)$

3.  $\lim \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \right)^k$

**5) Les limites et l'ordre :****Théorème :**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites numériques. On a les assertions suivantes :

- ① Si  $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(0 \leq u_n) \\ \lim u_n = l \end{cases}$  alors  $l \geq 0$
- ② Si  $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a \leq u_n) \\ \lim u_n = l \end{cases}$  alors  $l \geq a$
- ③ Si  $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(0 \leq u_n \leq b) \\ \lim u_n = l \end{cases}$  alors  $a \leq l \leq b$
- ④ Si  $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim u_n = l \text{ et } \lim v_n = l' \end{cases}$  alors  $l' \leq l$

**6) Les critères de convergences.****6.1 Critères fondamentaux :****Critère 1 :**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites numériques et  $l$  un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim u_n = l$$

**Critère 2 :**

Soient  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  trois suites numériques et  $l$  un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n \leq u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases} \text{ alors } \lim u_n = l$$

**Critère 3 :**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites numériques et  $l$  un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim u_n = +\infty$$

**Critère 4 :**

Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites numériques et  $l$  un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty \end{cases} \text{ alors } \lim u_n = -\infty$$

**Preuve :**

En utilisant la définition des limites montrer l'un des 4 critères.

**Exercice :**

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim \frac{3n + \sin(n)}{n+1}$
2.  $\lim \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right) = \lim \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{n^2+k} \right)$
3.  $\lim \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) = \lim \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$ .

**6.2 Suite de la forme :  $v_n = f(u_n)$** **Critère 5 :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ; et  $(u_n)_n$  une suite numérique telle que :

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases} \text{ alors } \lim f(u_n) = f(l)$$

**Exercice :**

Déterminer :

1.  $\lim \arctan \left( n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)$

$$2. \lim \sqrt[3]{n \arctan\left(\frac{8}{n}\right)}$$

### 6.3 Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

#### Activité :

Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de  $C_f$  avec la droite  $(\Delta) y = x$
2. Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ 
  - a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite  $(u_n)_n$
  - b) Conjecturer la monotonie de la suite  $(u_n)_n$  et sa limite potentielle.
3. Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite  $(v_n)_n$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$ 
  - a) Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(v_n)_n$  soit géométrique.
  - b) Déterminer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
  - c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$

#### Critère 6 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  ; et  $(u_n)_n$  une suite numérique telle que :

Si :

- d)  $f$  est continue sur  $I$
- e)  $f(I) \subset I$
- f)  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$
- g)  $u_0 \in I$  ( donc  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$  )
- h)  $(u_n)_n$  est convergente

Alors la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $l$  solution de l'équation  $f(x) = x$

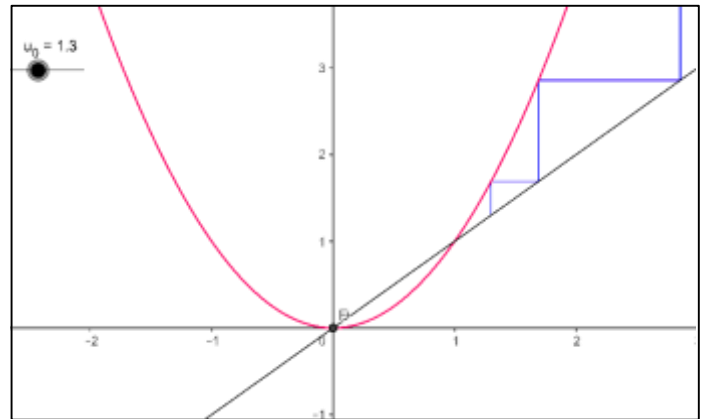
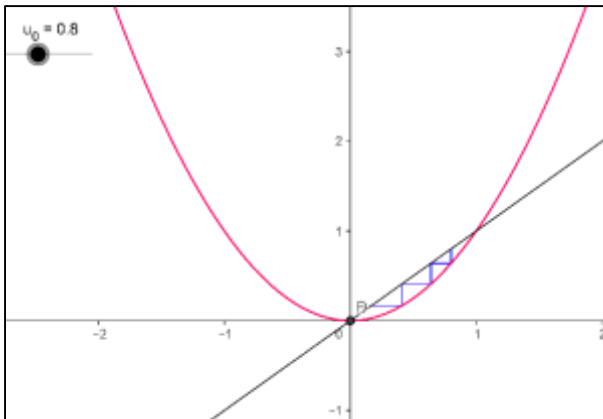
#### Remarque :

1- Par fois l'équation  $f(x) = x$  admet plusieurs solution ; Dans ce cas prenez celle qui est dans  $I$ .

S'il y a plusieurs solutions de l'équation  $f(x) = x$  ; utiliser la monotonie de  $(u_n)$

2- La fonction  $f$  et la suite  $(u_n)_n$  n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Pour la même fonction  $f: x \mapsto x^2$  si on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  elle sera décroissante convergente (Prouver le) ; mais si on considère la suite  $(v_n)$  définie par  $\begin{cases} v_0 = 1.3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$  elle sera croissante divergente.



### Exercices d'applications

Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  où  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de  $f$  et déterminer  $f([0,2])$
2. a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I = [0,2])$   
 b) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.  
 c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)_n$ .

### Critère 8 :

- Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers  $-\infty$

### Preuve :

On suppose que la suite  $(u_n)_n$  est croissante non majorée et montrons : (P)  $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow u_n > A)$

Soit  $A > 0$  puisque  $(u_n)_n$  est non majorée alors il existe  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$

et puisque  $(u_n)_n$  est croissante alors si  $n > n_0$  alors  $u_n > u_{n_0} > A$

donc il existe  $N$  ( $N = n_0$ ) qui vérifie la propriété (P)

D'où la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$

### Exercice

Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  où  $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante
2. Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_n$ .

### Propriété :

Toute suite convergente est bornée

**Remarque :** La réciproque n'est pas vraie :  $u_n = (-1)^n$  est bornée mais pas convergente.



**6.4 Les suites adjacentes :****Activité :**

Soit les suites numériques  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par :  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n n!}$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante et que la suite  $(v_n)_n$  est décroissante.
2. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont convergentes et ont la même limite.

Les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont appelées : **Suites adjacentes**.

**Définition :**

On dit que deux suites numériques  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont **adjacentes** si :

- L'une est croissante l'autre est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

**Propriété :**

Si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont deux suites **adjacentes** et  $(u_n)_n$  est croissante et  $(v_n)_n$  est décroissante alors

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$$

**Preuve :**

Par hypothèse on a :  $(u_n)_n$  est croissante donc  $u_n \leq u_{n+1}$

$(v_n)_n$  est décroissante donc  $v_{n+1} \leq v_n$

Par suite :  $(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \leq (u_n - v_n) - (u_n - v_n) = 0$

D'où la suite  $(u_n - v_n)_n$  est décroissante et tend vers 0 donc elle est de termes positifs et finalement

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$$

**Exercice :**

Considérons les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b & 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite  $(u_n)_n$  est croissante et que la suite  $(v_n)_n$  est décroissante
3. a) Montrer  $(\forall n \in \mathbb{N}) \left( v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) \right)$   
 b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$   
 c) Montrer que  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont adjacentes
4. Déterminer les limites des suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$ .